

# Planejamento e Programação da Produção numa Fundição Cativa Automatizada de Grande Porte

Silvio Alexandre de Araujo \*

Marcos Nereu Arenales †

\* Departamento de Informática  
Universidade Estadual de Maringá-PR  
Brasil  
silvio@din.uem.br

† Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação  
Departamento de Ciências de Computação e Estatística  
Universidade de São Paulo  
Brasil  
arenales@icmc.usp.br

---

## Abstract

This work consists of a case study in a large foundry, which has three molding lines and two sets of furnaces. The molding lines produce different types of items, which must be made of different alloys produced by the furnaces. In each period, the production programming in this foundry has two important levels of decision making which are linked: 1) which alloys should be produced in the furnace in each period and 2) the quantity of each item to be produced in each molding machine. Initially, the productive process is described and then a mixed integer programming optimization model is proposed in which the lot-sizing of the items and the capacity programming of the furnaces are considered. A commercial package/software was utilized to obtain the computational results. A simulation lasting 5 working days was carried out and the computational results obtained from the model solution were compared with the ones obtained by the company, showing a significant increase in the productivity and reduction concerning delays of the delivery deadline.

## Resumo

Este trabalho consiste num estudo de caso em uma fundição cativa de grande porte, a qual tem três linhas de moldagem e dois conjuntos de fornos. As linhas de moldagem produzem diferentes tipos de itens com demandas conhecidas e que devem ser feitos com diferentes ligas produzidas pelos fornos. Em cada período, a programação da produção nessa fundição envolve dois níveis importantes de decisão que estão inter-relacionados: 1) qual liga deve ser produzida no forno em cada período, e 2) a quantidade de cada item a ser produzida em cada máquina de moldagem. Inicialmente, o processo produtivo é

descrito e então um modelo matemático de otimização inteira mista é proposto o qual considera o dimensionamento de lotes para os itens e a programação da capacidade dos fornos. Um pacote comercial foi utilizado para a obtenção dos resultados computacionais. Foi feita uma simulação de 5 dias de trabalho e os resultados obtidos a partir da solução do modelo foram comparados com os resultados obtidos na prática pela indústria, mostrando expressivos ganhos de produtividade e redução de atrasos na entrega dos pedidos.

**Keywords:** programação inteira mista, dimensionamento de lotes, programação da produção, fundição.

**Title:** Lot sizing and Scheduling in a Large Automated Foundry

---

## 1 Introdução

Atualmente, no Brasil as fundições estão presentes em todas as regiões produzindo desde peças simples de uso doméstico, até as mais sofisticadas, como autopeças de veículos e peças e/ou partes de máquinas e equipamentos de uso industrial. Segundo o relatório da ABIFA- Associação Brasileira de Fundição, em Novembro de 2003 o setor produziu uma média de 10.082 toneladas/dia. Esse número subiu para uma média de 12.338 toneladas/dia em Novembro de 2004 representando um crescimento de 22,3% gerando 55.715 empregos diretos (ABIFA, 2004).

A grande maioria da produção brasileira de fundidos é fabricada por **fundições cativas**, que são departamentos de grandes empresas (por exemplo, algumas montadoras de automóveis) cuja produção é destinada, basicamente, para consumo próprio. Essas fundições cativas estão orientadas para a produção em série, automatizada e fabricam grandes quantidades de cada item. Este trabalho enfoca problemas de planejamento e programação da produção que surgem numa fundição cativa do interior do estado de São Paulo.

Revisões bibliográficas de trabalhos que tratam de problemas de planejamento e programação da produção podem ser encontradas em Billington *et al.* (1983), Bahl *et al.* (1987), Maes e van Wassenhove (1988), Goyal e Gunasekaran (1990), Potts e van Wassenhove (1992), Kuik *et al.* (1994), Drexl e Kimms (1997), Potts e Kovalyov (2000) e Karimi *et al.* (2003). Entretanto, existem poucos trabalhos publicados em revistas que tratam de problemas de planejamento e programação da produção, especificamente orientados para o setor de fundições.

Em Gonçalves-Vianna e Arenales (1995), Santos-Meza *et al.* (2002), Araujo e Arenales (2003), Araujo *et al.* (2003) e Araujo (2003) são realizados estudos orientados para fundições de pequeno e médio porte. Os trabalhos encontrados na literatura orientados para grandes fundições tratam, especificamente, do problema de sequenciamento das tarefas nas máquinas, como em Sounderpandian e Balashanmugam (1991), Gravel *et al.* (2000). A grande maioria dos trabalhos relacionados ao tema trata do problema de programação da produção em grandes siderúrgicas. Este tipo de fábrica é caracterizado pela inexistência do setor de moldagem, pois os itens demandados são chapas de aço de diferentes tamanhos e composições, fabricadas por máquinas de laminação, onde o metal passa por cilindros rolantes distanciados de acordo com as especificações da chapa a ser fabricada. Tang *et al.* (2001) fazem uma revisão bibliográfica de trabalhos de planejamento e programação da produção aplicados à indústria de fabricação de aço. Vários trabalhos tratam de problemas práticos encontrados em grandes siderúrgicas: Petersen *et al.* (1992), Hamada *et al.* (1995), Bowers *et al.* (1995), Hendry *et al.* (1996), Lee

et al. (1996), Lopes et al. (1998), Tang et al. (2000a), Tang et al. (2000b).

## 2 O Processo Produtivo

Uma fundição é caracterizada pela transformação, numa primeira etapa, de minérios de ferros em ligas metálicas, que por sua vez, ainda em estado líquido, são despejadas dentro de moldes, os quais são normalmente feitos de areia e resina, para a produção de peças fundidas. Assim, dois tipos de equipamentos básicos estão presentes numa fundição: fornos de fusão, para a produção de ligas metálicas e, máquinas de moldagem, para a produção dos moldes (em fundições pequenas, a moldagem é normalmente manual). A Figura 1 mostra um conjunto de nove fornos e três máquinas de moldagem. Nas máquinas de moldagem estão integradas algumas das operações, tais como a produção dos moldes, a injeção da liga metálica nos moldes, o resfriamento da liga, a eliminação da areia e, finalmente a eliminação de rebarbas, que consistem em resíduos de ligas. Por isto, são chamadas *linhas de moldagem*. Um molde, em geral, é composto de várias cavidades e, cada uma das cavidades gera uma peça (produto final). A Tabela 1 ilustra uma carteira de pedidos que na coluna “cavidade” mostra o número de cavidades de cada molde, que varia de 6 a 48. Por exemplo, um único molde pode produzir um conjunto de 48 peças do tipo 24 e esse conjunto de peças é chamado “árvore”.

É comum que grandes fundições organizem seus equipamentos em setores, de modo que certas linhas de moldagem sejam abastecidas por ligas metálicas de certos fornos. Por exemplo, a fundição estudada tem dois setores. O setor 1 consiste em cinco fornos (na Figura 1 são F1, ..., F5) e duas linhas de moldagem (L1 e L2). Os fornos do setor 1 abastecem apenas as linhas de moldagem desse setor, conforme representado pelas setas na figura 1. Dois tipos principais de ligas são produzidos: cinzenta e nodular. A liga cinzenta pode ser subdividida em 5 outras ligas e a nodular em 2 diferentes tipos de ligas. O setor 1 produz apenas peças referentes à liga cinzenta e o setor 2 pode produzir peças das duas ligas (nodular e cinzenta). Entretanto, uma vez que uma liga esteja sendo produzida num determinado período, os fornos do setor 2 devem produzir essa mesma liga e repassá-la para o reservatório (um forno de grande capacidade que mantém a liga em estado líquido).

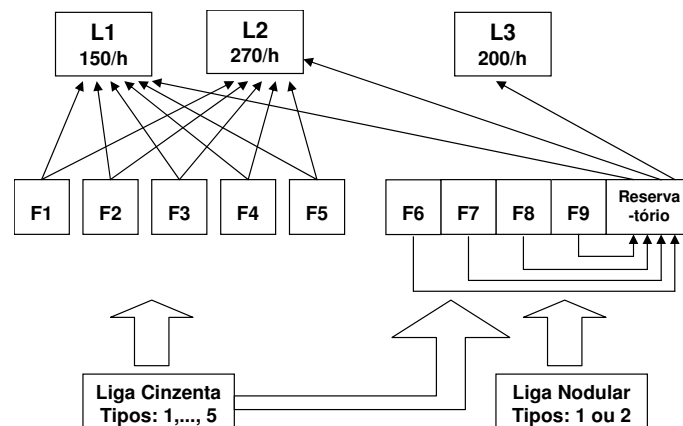


Figura 1: Processo produtivo da empresa.

Veja na Figura 1 que não há transporte de liga dos fornos F6-F9 para as linhas de moldagem.

Assim como os fornos têm uma capacidade limitada para a produção de ligas por hora, as linhas de moldagem têm uma capacidade produtiva limitada. Por exemplo, a linha L1 produz em média 150 moldes por hora, enquanto a linha L2 produz 270 e a linha L3 produz 200. Naturalmente, a produtividade das linhas depende da peça a ser moldada e existem algumas peças que não podem ser produzidas por determinadas linhas (normalmente, por questão de qualidade).

### 3 Definição do Problema

A programação da produção é feita por turno de trabalho. A fundição estudada funciona 24 horas por dia, que é dividido em 3 turnos de trabalho. Os fornos funcionam ininterruptamente durante os 3 turnos, porém, uma fração de tempo do terceiro turno é utilizada para manutenção das linhas. Isto faz com que os fornos estejam com carga máxima no início do primeiro turno do dia seguinte. É também interessante observar que muitas vezes a programação feita pela empresa admite diminuir o tempo de manutenção. Veja os resultados na tabela 5, a qual mostra que a linha L3 foi utilizada além do tempo disponível, porém a modelagem matemática do problema não admite essa solução.

Para efeito de programação da produção, cuja ênfase está nas linhas de moldagem, é suficiente considerar apenas duas ligas, cinzenta e nodular e, portanto, as subdivisões de cada liga não são consideradas. Esta simplificação é perfeitamente aceitável, pois a transformação da liga (cinzenta ou nodular) para uma das sub-divisões é feita depois que a base estiver pronta, apenas adicionando-se diferentes elementos.

O setor 1 (fornos F1, ..., F5) e o setor 2 (fornos F6, ..., F9) têm capacidades de armazenamento de 10.000 kg e 8.000 kg, respectivamente. A energia contratada para os fornos atualmente é de 6.000 kw/h e, para a fabricação de 1.000 kg por hora de liga são necessários 750 kw de energia. Portanto, é possível fabricar, em uma hora, no máximo 8.000 kg de liga. Isto representa a capacidade total de reposição dos fornos por hora. A distribuição de energia, por hora, para o setor 1 é de, no máximo, 4.000 kw (ou seja, no máximo é possível produzir 5.330 kg de liga por hora no setor 1) e, para o setor 2 é de, no máximo, 2.500 kw por hora (capacidade em liga: 3.330 kg por hora).

Observe que a soma das capacidades máximas de reposição dos dois setores ultrapassa 8.000 kg por hora, que é a capacidade máxima de reposição total. Portanto, como deve ser feita a reposição nos dois setores é uma decisão a ser tomada.

Desta forma, na modelagem matemática (seção 4) existirão variáveis de decisão referentes ao armazenamento das ligas e variáveis de decisão referentes à reposição das ligas. Tais variáveis serão limitadas pelas capacidades de armazenamento e de reposição dos setores.

A carteira de pedidos de determinado mês foi fornecida pela indústria e é mostrada na Tabela 1. A indústria fabrica 8 diferentes famílias de produtos finais, os quais são decompostos em diferentes peças que devem ser fabricadas pela fundição. Para cada peça existe um molde específico que produz uma quantidade de peças de cada vez, dependendo do número de cavidades presentes no molde. O conjunto de peças feito em um só molde é chamado árvore.

A demanda interna de cada peça é constante em cada mês, ou seja, durante 1 mês, a cada dia tem-se a mesma quantidade demandada para cada peça. Para se fazer a programação

Tabela 1: Carteira de pedidos real.

Peça	Família	Demanda Peça	Cavidades	Demanda Árvore	Peso Peça	Peso Árvore	Peso Dia	Liga	Est. Inicial	Peso Est. Ini.
1	A	2580	6	430	2,73	16,4	7052	C	777	12745,53
2	B	4248	6	708	3,30	19,8	14018,4	C	397	7863,90
3	C	17496	12	1458	1,79	21,48	31317,84	C	1502	32264,75
4	D	11328	6	1888	2,78	16,7	31529,6	C	2706	45190,20
5	E	6576	6	1096	2,62	15,7	17207,2	C	1174	18434,42
6	F	5664	8	708	1,73	13,8	9770,4	C	700	9660,00
7	F	5652	12	471	1,03	12,3	5793,3	C	875	10762,50
8	G	404	4	101	4,13	16,5	1666,5	C	193	3176,25
9	B	4200	35	120	0,31	10,8	1296	C	280	3024,00
10	G	400	8	50	1,29	10,34	517	C	150	1551,00
11	D	11305	35	323	0,42	14,8	4780,4	C	189	2790,86
12	E	6545	35	187	0,35	12,2	2281,4	C	257	3137,14
13	G	408	12	34	0,65	7,8	265,2	C	350	2730,00
14	G	400	20	20	0,52	10,4	208	C	20	208,00
15	G	396	36	11	0,24	8,75	96,25	C	11	96,25
16	A	2600	40	65	0,22	8,9	578,5	C	185	1646,50
17	B	2562	42	61	0,17	7,3	445,3	C	452	3302,38
18	A	2592	48	54	0,14	6,85	369,9	C	125	856,25
19	G	384	24	16	0,30	7,3	116,8	C	171	1247,08
20	A	2583	21	123	0,75	15,85	1949,55	N	310	4905,95
21	B	4245	15	283	0,89	13,37	3783,71	N	360	4813,20
22	F	5655	15	377	0,69	10,3	3883,1	N	673	6935,33
23	C	5817	21	277	0,58	12,1	3351,7	N	732	8859,50
24	H	11616	48	242	0,35	17	4114	N	542	9208,33
25	D	11322	18	629	0,69	12,4	7799,6	N	581	7205,78
26	E	6570	18	365	0,70	12,62	4606,3	N	417	5258,33
27	G	400	10	40	1,23	12,3	492	N	110	1353,00
<b>Total</b>		<b>133948</b>		<b>10137</b>			<b>159290</b>		<b>14239</b>	<b>209226,45</b>

da produção para um dia de trabalho é preciso considerar o estoque inicial de cada dia. No estoque inicial, são consideradas as peças que estão prontas na fundição, bem como as peças que estão armazenadas no setor de usinagem.

Como é possível observar na Tabela 1, no mês em questão, a indústria tem 27 peças que devem ser programadas para a fabricação diária. A Tabela 1 apresenta ainda, a demanda diária de cada peça, o número de cavidades de cada molde, a demanda por número de árvores (que é calculada dividindo-se a demanda da peça pelo número de cavidades do molde), o peso bruto de cada peça, o peso bruto de cada árvore, a liga em que cada peça deve ser feita (C=Cinzenta ou N=Nodular) e o estoque inicial (em número de árvores e em peso) de cada árvore.

O problema da programação da produção na fundição estudada consiste em programar simultaneamente os fornos e as linhas de moldagem. Ou seja, deve-se determinar as quantidades adequadas das ligas produzidas pelos fornos em cada período do planejamento, respeitando-se as capacidades dos fornos (seja de reposição como de armazenagem), as quais serão usadas para a fabricação de peças nas máquinas mais adequadas (uma mesma peça pode ser produzida em máquinas diferentes, porém uma máquina pode ser considerada pelo programador como “mais adequada” que outra). Isto deve ser feito de modo a atender a demanda e que os atrasos sejam mínimos e os estoques em níveis desejados. Na seção 4 apresentamos um modelo matemático para este problema.

## 4 Modelagem Matemática

Antes de apresentar a modelagem matemática, é necessário fazer alguns comentários com respeito a algumas exigências impostas pelo gerente de produção da indústria, as quais devem fazer parte das decisões do planejamento e programação da produção e complementam as informações anteriores:

- a programação deve ser feita em número de árvores de cada tipo de peça, ou seja, deve-se determinar o número de vezes que o molde (que fabrica determinada peça) será utilizado, em cada linha de moldagem, em cada turno de trabalho.
- os lotes devem ser quebrados em 3, caso a demanda seja maior que 1000 árvores ou em 2, caso a demanda esteja entre 500 e 1000 árvores. Por outro lado, os tamanhos dos lotes não devem ser muito pequenos, pois, existe um tempo de preparação das linhas de moldagem, que envolve a troca dos moldes e um custo de preparação para a limpeza do molde que estava sendo utilizado (o tempo e o custo de preparação são independentes da seqüência). Embora o tempo e custo de preparação sejam pouco relevantes na produção, são considerados no modelo com o propósito de inibir a formação de lotes pequenos. Deste modo, não é importante considerar no modelo matemático o fato da linha de moldagem estar preparada para a produção de uma peça fabricada no período anterior (em problemas com tempo e custo de preparação altos esta consideração pode ser importante);
- é desejável que se tenha estoque de peças para um dia inteiro de trabalho. No entanto, o nível de estoque também deve ser limitado superiormente;

A seguir, um modelo matemático é apresentado:

### Índices:

$m=1, \dots, M$	linhas de moldagem;
$k=1, \dots, K$	tipos de ligas;
$i=1, \dots, N$	tipos de peças;
$t=1, \dots, T$	períodos de tempo.
$\eta_t$	número máximo de sub-períodos no período $t$ ( $t=1, \dots, T$ );
$F_t = 1 + \sum_{\tau=1}^{t-1} \eta_\tau$	denota o primeiro sub-período do período $t$ ;
$L_t = F_t + \eta_t - 1$	denota o último sub-período do período $t$ ;
$n = F_1, \dots, L_T$	sub-períodos.

Observação: Vale ressaltar que, cada turno de trabalho deve ser programado separadamente e, a cada dia, é preciso re-programar a produção para os 3 turnos. Como os custos são subjetivamente estimados e a carteira de pedidos é atualizada freqüentemente dentro do horizonte de planejamento (principalmente devido a paralisações na usinagem), o problema é resolvido considerando algumas variáveis e restrições somente para os períodos imediatos (para o problema prático em questão, serão considerados períodos imediatos apenas os períodos relativos ao primeiro dia de trabalho, ou seja, 3 turnos de trabalho). Posteriormente, o horizonte é rolado progressivamente para uma nova aplicação do modelo (Clark e Clark, 2000). Assim, a programação para o primeiro dia é feita de forma detalhada, ou seja, o primeiro período  $t = 1$

(que equivale a um dia) será subdividido em 3 sub-períodos (que equivalem aos 3 turnos de trabalho) e será feita a programação para cada turno de trabalho separadamente. Além disso, será feita a programação de forma aproximada (sem subdividir em turnos de trabalho) para outros 4 dias de trabalho, o que resulta num total de 5 períodos (ou 5 dias), ou seja:

$$F_1 = 1 \text{ e } L_1 = 3; F_2 = 4 \text{ e } L_2 = 4; F_3 = 5 \text{ e } L_3 = 5; F_4 = 6 \text{ e } L_4 = 6; F_5 = 7 \text{ e } L_5 = 7.$$

Desta forma, tem-se  $T=5$  períodos  $t$  e  $n = F_1, \dots, L_5$ , ou seja,  $n=1, \dots, 7$  sub-períodos  $n$  (ver Figura 2).

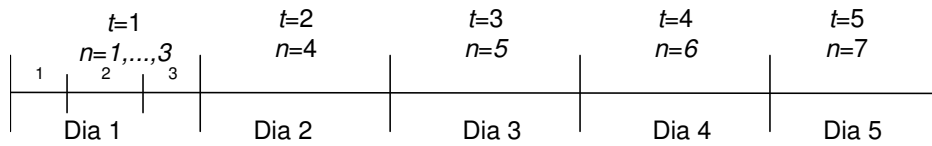


Figura 2: Períodos e sub-períodos do Método de Horizonte Rolante.

### Dados do problema:

- $Cap_k$  capacidade total de armazenamento da liga  $k$  (é determinada pela capacidade dos fornos que podem armazenar a liga  $k$ );
- $CT$  capacidade total de armazenamento de todos os fornos;
- $CRep_k$  capacidade máxima de produção (reposição) da liga  $k$  numa hora de trabalho (é determinada pela capacidade de reposição dos fornos que podem produzir a liga  $k$ );
- $CTrep$  capacidade total de reposição de todos os fornos numa hora de trabalho (delimitada pela energia contratada);
- $d_{it}$  demanda (em número de árvores) da peça  $i$  no período  $t$ ;
- $\rho_i$  peso unitário bruto de cada árvore da peça  $i$ ;
- $S(k)$  conjunto de peças que utilizam a liga  $k$ ;
- $a_{im}$  quantidade de árvores da peça  $i$  que a linha  $m$  consegue fazer por hora;
- $h_{mn}$  número de horas disponíveis na linha de moldagem  $m$  no sub-período  $n$ ;
- $q_{mn}$  número de horas de paralisações (quebras) na linha de moldagem  $m$  no sub-período  $n$ ;
- $hf_n$  número de horas disponíveis nos fornos no sub-período  $n$ ;
- $H_{it}^+$  custo de estocagem de uma árvore da peça  $i$  no período  $t$ ;
- $H_{it}^-$  custo pelo atraso na entrega de uma árvore da peça  $i$  no período  $t$ ;
- $c_{im}$  custo para produzir uma árvore da peça  $i$  na linha  $m$  ( $c_{im} = \infty$  significa que a árvore da peça  $i$  não pode ser produzida pela linha  $m$ );
- $Xmax_i$  tamanho máximo de um lote da árvore da peça  $i$ ;
- $Imax_{it}$  estoque máximo de árvores da peça  $i$  no período  $t$ ;
- $s_m$  custo de preparação na linha  $m$ ;
- $st_m$  tempo de preparação na linha  $m$ ;
- $CF_{k0}$  quantidade de liga  $k$  no início do planejamento (também no início de cada dia).

Observação: As horas disponíveis ( $h_{mn}$ ) para cada linha poderiam incluir as horas de paralisação ( $q_{mn}$ ), pois para efeito de programação deve-se considerar:  $h_{mn} - q_{mn}$ . Porém,  $q_{mn}$  é um parâmetro aleatório que auxilia o programador em simulações.

**Variáveis do problema:**

$X_{imn}$	quantidade de árvores da peça $i$ produzida na linha $m$ no sub-período $n$ ;
$I_{it}^+$	quantidade estocada de árvores da peça $i$ no período $t$ ;
$I_{it}^-$	quantidade em atraso (ou, estoque negativo) de árvores da peça $i$ no período $t$ ;
$CF_{kn}$	quantidade disponível (em kg) de liga $k$ no final do sub-período $n$ ;
$CR_{kn}$	quantidade de reposição (em kg) da liga $k$ no sub-período $n$ ;
$Y_{imn}$	variável binária que indica a preparação para produzir a árvore da peça $i$ na linha $m$ no sub-período $n$ .

Modelo:

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (H_{it}^- I_{it}^- + H_{it}^+ I_{it}^+) + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^T \sum_{n=F_t}^{L_t} c_{im} X_{imn} + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^T \sum_{n=F_t}^{L_t} s_m Y_{imn} \quad (1)$$

Sujeito a:

$$I_{i,t-1}^+ - I_{i,t-1}^- + \sum_{n=F_t}^{L_t} \sum_{m=1}^M X_{imn} - I_{it}^+ + I_{it}^- = d_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{X_{imn}}{a_{im}} + s_m Y_{imn} \right) \leq (h_{mn} - q_{mn}) \quad m = 1, \dots, M \quad n = F_1, \dots, L_T \quad (3)$$

$$0 \leq X_{imn} \leq X_{max_i} Y_{imn} \quad i = 1, \dots, N \quad m = 1, \dots, M \quad n = F_1, \dots, L_T \quad (4)$$

$$CF_{k,n-1} - \sum_{i \in S(k)} \sum_{m=1}^M \rho_i X_{imn} + CR_{kn} = CF_{kn} \quad k = 1, \dots, K \quad n = F_1, \dots, L_1 \quad (5)$$

$$0 \leq CF_{kn} \leq Cap_k \quad k = 1, \dots, K \quad n = F_1, \dots, L_1 \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^K CF_{kn} \leq CT \quad n = F_1, \dots, L_1 \quad (7)$$

$$0 \leq CR_{kn} \leq CRep_k(hf_n) \quad k = 1, \dots, K \quad n = F_1, \dots, L_T \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^K CR_{kn} \leq CTrep(hf_n) \quad n = F_1, \dots, L_T \quad (9)$$

$$\sum_{i \in S(k)} \sum_{m=1}^M \rho_i X_{imn} \leq CF_{k0} + CR_{kn} \quad k = 1, \dots, K \quad n = F_2, \dots, L_T \quad (10)$$

$$0 \leq I_{it}^+ \leq I_{max_{it}} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (11)$$

$$I_{it}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (12)$$

$$Y_{imn} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, N \quad m = 1, \dots, M \quad n = F_1, \dots, L_T \quad (13)$$

Observações: Note que certas restrições ocorrem a cada período (veja (2)), ou a cada sub-período (veja (3)), ou apenas para os primeiros sub-períodos a serem implementados (veja (5)), ou somente para os períodos futuros (veja (10)).

A função (1) é composta de três parcelas que objetivam a formação de estoques ou atrasos coerentes, a designação das peças para serem fabricadas nas máquinas mais adequadas e evitar a formação de lotes pequenos. Para isto, os coeficientes em (1) devem ser definidos pelo utilizador. Por exemplo, quando há interesse de se manter peças em estoques, de modo que, em caso de quebra de máquina, a demanda possa ser atendida pelo estoque, valores negativos são usados em  $H_{it}^+$  para incentivar que as variáveis  $I_{it}^+$  sejam positivas. As variáveis  $I_{it}^-$  correspondem a atrasos e o gerente de programação pode ajustar  $H_{it}^-$  de modo a proibir ou não atrasos de certos itens. A segunda parcela da função objetivo é também usado para levar em conta algumas proibições do processo produtivo, pois algumas peças não podem ser feitas por determinada linha, devido a alguma restrição da linha de moldagem. Assim, um valor alto para  $c_{im}$  faz com que o item  $i$  não seja produzido na máquina  $m$ . Além disso, o segundo termo ainda descreve algumas prioridades em relação a certas peças que, se possível, deveriam ser



feitas em linhas específicas, as quais são mais adequadas para produzir tais peças. O terceiro termo em (1) define os custos de preparação.

Além disso, os estoques negativos fornecem uma ferramenta para a avaliação dos prazos de entrega. Por exemplo, se  $d_{i1}=30$  e uma solução tal que:  $I_{i1}^- = 10$ ,  $I_{i2}^- = 5$ ,  $I_{i3}^- = 0$ , significa que a demanda para o item  $i$  será totalmente atendida com 3 dias de atraso. Desta forma, é possível alertar o cliente e, se necessário, re-calibrar os parâmetros relativos a esta peça.

As restrições (2) são de balanceamento de estoque e consideram tanto estoques positivos, como negativos (atrasos). As restrições (3) são devido à limitação de tempo disponível das linhas de moldagem e (4) indicam que pode haver produção de determinada peça somente se houver preparação para esta peça e, a quantidade total produzida de árvores da peça  $i$  na linha  $m$  no sub-período  $n$  deve ser menor que o tamanho máximo do lote para a peça  $i$ . As restrições (5)-(7) se aplicam apenas para os  $L_1$  primeiros sub-períodos (onde cada turno de trabalho é programado separadamente) e (5) são restrições de balanceamento da capacidade dos fornos, levando em consideração a quantidade de liga restante do turno anterior ( $CF_{k,n-1}$ ), a capacidade de reposição de cada liga ( $CR_{kn}$ ) e a quantidade (em peso) de liga utilizada em cada turno ( $\sum_{i \in S(k)} \sum_{m=1}^M \rho_i X_{imn}$ ). Cabe observar que,  $CF_{k0}$  é um dado do problema e representa a quantidade de cada liga presente no início do planejamento, que normalmente é o primeiro turno de um dia de trabalho e os fornos estão carregados devido as máquinas de moldagem terem sido paradas para manutenção. Em (6) a quantidade de liga restante num turno ( $CF_{kn}$ ) é limitada pela capacidade total de armazenamento da liga ( $Cap_k$ ) e, em (7) a quantidade restante de todas as ligas ( $\sum_{k=1}^K CF_{kn}$ ) é limitada pela capacidade total de armazenamento ( $CT$ ). Em (8) a capacidade de reposição da liga  $k$  num sub-período  $n$  ( $CR_{kn}$ ) é limitada pela capacidade máxima de reposição por hora da liga  $k$ , vezes o número de horas do sub-período ( $Crep_k (hf_n)$ ) e, em (9) a capacidade de reposição de todas as ligas num sub-período ( $\sum_{k=1}^K CR_{kn}$ ) é limitada pela capacidade total de reposição por hora (restrição devido à energia contratada), vezes a quantidade de horas do sub-período ( $CTrep (hf_n)$ ). Em (10) as restrições de capacidade de produção de ligas para os outros dias de trabalho (quando os períodos não são divididos em sub-períodos) são consideradas, sendo a quantidade total de liga limitada pela quantidade inicial da liga no começo do dia, mais a capacidade de reposição da liga no dia de trabalho. As restrições (11)-(13) limitam as variáveis de estoque, de atraso e definem a variável de preparação como binária.

## 5 Resultados Computacionais

Para apresentar os resultados computacionais foram simulados 5 dias de programação utilizando os dados reais da indústria. O modelo foi resolvido 5 vezes (com o pacote de otimização inteira Ampl/Cplex 7.1, num Pentium III de 500 MHz com 512 MB de RAM) considerando apenas a programação detalhada para cada dia separadamente. Entre uma e outra resolução os dados foram atualizados, considerando o estoque inicial do dia, e todas as quebras das linhas ocorridas durante o dia. A demanda não precisa ser atualizada, pois é constante durante os 5 dias. A rigor, no primeiro período a demanda é  $d_{i1} - I_{i0}^+$ .

Para cada dia de programação, a resolução do modelo envolve 567 variáveis binárias  $Y_{imn}$ ,

567 variáveis lineares  $X_{imn}$ , 270 variáveis lineares  $I_{it}^+$  e  $I_{it}^-$ , 28 variáveis lineares  $CF_{kn}$  e  $CR_{kn}$  e um total de 974 restrições. Na programação de cada dia o tempo do pacote foi limitado em 2 minutos e em nenhum dos problemas chegou-se a uma solução a mais de 3% do limitante inferior. Portanto, todas as soluções estão relativamente (em se tratando de um problema prático) próximas do ótimo. Isso mostra que o problema é relativamente pequeno permitindo chegar a bons resultados utilizando um pacote de otimização inteira num tempo computacional razoável.

A maioria dos dados utilizados é apresentada na Tabela 1. Observe que a demanda diária é de 10.137 árvores de peças e 159.290 kg e o estoque inicial é de 14.239 árvores de peças e 209.226 kg. Os custos (isto é, parâmetros da função objetivo) foram ajustados depois de várias reuniões com a gerência na empresa e de exaustivos testes computacionais. Vale ressaltar, a dificuldade em se estabelecer custos adequados e, mesmo depois de estabelecê-los é praticamente impossível saber se, realmente, são os que melhor representam os objetivos da empresa. Para isto é indispensável a participação de um programador experiente, que conheça bem a empresa. A seguir, são apresentadas algumas conclusões alcançadas após certa experiência com o modelo e com o problema prático.

Os custos de estocagem ( $H_{it}^+$ ) devem ser negativos, pois é necessário manter um nível de estoque correspondente a um dia de trabalho. Os custos por atraso ( $H_{it}^-$ ) devem ser altos (quando comparado com os outros custos) e positivos de forma a penalizar fortemente atrasos, os quais, são bastante indesejáveis, pois causam uma reação em cadeia no restante da empresa. Foram estabelecidos 4 custos diferentes relativos à produção dos itens nas linhas ( $c_{im}$ ). Um deles é um valor muito alto que representa que a linha não pode produzir a peça, os outros 3 representam ótima, boa e inadequada associação de peças às linhas de moldagem. Finalmente, os custos de preparação são definidos pelo utilizador de modo a evitar lotes muito pequenos.

Durante os 5 dias simulados a quantidade de paralisações por quebras das linhas foi bastante expressiva (ver Tabela 2), dificultando a programação da produção. Observe que, em geral, apenas 71,90% do tempo foi disponível para a produção.

Tabela 2: Tempo disponível nas 3 linhas a cada dia.

	1	2	3	4	5	Média
Tempo Total (h)	64,86	64,86	64,86	64,86	64,86	64,86
Tempo de Paralisações (h)	16,68	12,8	25,05	20,34	16,25	18,22
Porcentagem Disponível	74,28	80,27	61,38	68,64	74,95	71,90

Os critérios utilizados para comparar as duas programações (programação realizada na prática e a programação obtida pela resolução do modelo matemático) foram estabelecidos com o gerente de produção da indústria e estão nas Tabelas 3 e 4, onde nas colunas tem-se informação sobre os 5 dias que foram programados e a média para esses 5 dias e, nas linhas, são analisados o número de preparações obtidos em cada programação, o custo total de produção ( $c_{im}$ ) (estabelecidos de acordo com o interesse em se utilizar determinada linha para fazer determinada peça), a quantidade (unidades) total em estoque e o peso (kg) total estocado a cada dia, a quantidade total em atraso e o peso total em atraso a cada dia, a quantidade total produzida e o peso total produzido a cada dia, a porcentagem de utilização das linhas sem preparações e a porcentagem de utilização das linhas com preparações.

Tabela 3: Resumo da programação da produção: prática.

	1	2	3	4	5	Média
Preparações	15	22	15	19	21	18,4
Custo de Prod.	9129	16677	14094	13332	17583	14163
Quant. Estoque	12098	10810	8694	7386	7226	9242,8
Peso Estoque	174971	152104	123140	106907	100650	131554
Quant. Atraso	0	0	247	580	1752	515,8
Peso Atraso	0	0	2821	6922	21909	6330
Quant. Produz.	7996	9272	7352	8496	8804	8384
Peso Produzido	125035	143346	120582	138956	138046	133193
Utilização	78,18	83,14	92,62	88,14	86,88	85,47
Utilização Prep.	81,92	88,21	97,14	93,27	92,06	90,20

Tabela 4: Resumo da programação da produção: solução modelo (1)-(13).

	1	2	3	4	5	Média
Preparações	22	27	24	26	27	25,2
Custo de Prod.	13298	14092	10222	11810	12482	12381
Quant. Estoque	13029	12721	9698	8129	7241	10164
Peso Estoque	204548	201938	154618	128936	117744	161557
Quant. Atraso	0	0	0	0	0	0
Peso Atraso	0	0	0	0	0	0
Quant. Produz.	8935	9829	7113	8568	9249	8738,8
Peso Produzido	154714	156681	111960	133606	148091	141010
Utilização	90,22	89,51	87,32	88,19	88,34	88,79
Utilização Prep.	95,7	95,74	94,56	95,19	95	95,27

Observe que, nas duas programações o nível de estoque foi reduzido dia a dia. Isso reflete as paralisações das linhas. Vale lembrar que, é desejável manter o nível de estoque para um dia de trabalho (10.137 moldes/dia e 159.290kg/dia). O nível de estoque da programação feita pela solução do modelo (Tabela 4) se mantém ligeiramente superior em todos os dias.

O peso total produzido na programação do modelo é 5,8% maior que o peso total produzido pela programação da indústria.

O número total de preparações obtido na solução do modelo é maior que as preparações feitas pela indústria. Tal fato pode ser explicado pela maior utilização das linhas, o que levou a uma maior produção e conseqüente redução para zero da quantidade atrasada (que é o principal objetivo da empresa, refletido nos altos valores para  $H_{it}^-$ ).

Foi feita uma análise da utilização de cada linha de moldagem separadamente. Foram analisadas as porcentagens de utilização do tempo disponível. Como é possível observar nas Tabelas 5 e 6, a programação obtida pela solução do modelo (1)-(13) utilizou cerca de 20,49% a mais da linha L1, 6,71% a mais da linha L2 e 7,62% a menos a linha L3.

Tabela 5: Porcentagem de utilização das linhas (com preparações): prática.

	1	2	3	4	5	Média
L1	52,02	63,02	98,98	80,96	96,73	75,91
L2	93,75	96,92	82,82	88,90	76,27	88,03
L3	96,13	104,71	106,09	104,19	102,67	102,53

Tabela 6: Porcentagem de utilização das linhas (com preparações): solução do modelo.

	1	2	3	4	5	Média
L1	97,2	96,74	97,04	96,27	93,96	96,40
L2	94,05	95,27	92,79	95,21	95,58	94,74
L3	95,79	95,2	93,64	94,62	95,05	94,91

Após uma análise minuciosa das peças produzidas em cada linha foi possível constatar que houve uma troca entre as linhas L2 e L3, ou seja, algumas peças que estavam sendo produzidas na linha L3 na programação da indústria, passaram a ser produzidas pela linha L2 na programação obtida pelo modelo. Isso aumentou o rendimento da linha L3, pois esta não foi sobrecarregada (os 102,53% da programação da indústria representam que a linha foi utilizada em hora-extra, diminuindo o tempo de manutenção). Além disso, a solução do modelo utilizou bastante a linha L1, o que é refletido no aumento expressivo da produção e na redução dos atrasos.

## 6 Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho foi feito um estudo de caso em uma fundição cativa de grande porte. Um modelo matemático de programação inteira mista foi proposto e resolvido com auxílio de um pacote de otimização inteira. O modelo matemático considera a programação das linhas de moldagem, bem como, a distribuição de capacidade nos fornos. Os resultados computacionais indicam que o modelo matemático proposto representa bem o problema de programação da produção na fundição estudada e permite um aumento do rendimento das linhas (devido às melhores associações de peças às linhas), aumento na utilização das linhas, o que leva também a um aumento na produção, de forma a evitar atrasos e a manter o nível de estoque. Além disso, o modelo também apresenta um controle da capacidade dos fornos, impedindo que se faça uma programação nas linhas de moldagem que seja inviável para os fornos, ou seja, é feito um balanceamento no peso das peças que estão sendo produzidas a cada turno de trabalho de modo que, os pesos totais das ligas sejam admissíveis para os fornos. Na programação feita pela indústria este fato ocorre muitas vezes, ou seja, a programação das linhas é feita sem considerar a capacidade dos fornos de modo que, muitas vezes, as linhas ficam paradas aguardando o metal que está sendo fundido nos fornos. Isso reflete numa baixa utilização das linhas de moldagem.

Nas próximas etapas da pesquisa, um método de solução específico para este problema,

baseado em metaheurísticas, deverá ser desenvolvido, bem como uma interface gráfica amigável de modo a viabilizar a implantação desta abordagem de solução na prática industrial.

**Agradecimentos:** Os autores agradecem o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e ao revisor criterioso da revista *Investigação Operacional*.

## 7 Referências

- [1] Allahverdi, A., Gupta, J. N. D. e Aldowaisan, T. (1999). A Review of Scheduling Research Involving Setup Considerations. *Omega, International Journal of Management Science*, 27, 219-239.
- [2] Araujo, S. A. e Arenales, M. N. (2003). Dimensionamento de Lotes e Programação do Forno numa Fundição de Porte Médio. *Pesquisa Operacional*, v. 23, n. 3, p. 403-420
- [3] Araujo, S. A., Arenales, M. N. e Clark, A. R. (2003). Dimensionamento de Lotes e programação do Forno numa Fundição de pequeno porte. *Gestão & Produção*, v. 11, n. 2, p.165-176.
- [4] Araujo, S. A. (2003). *Modelos e Métodos para o Planejamento da Produção Aplicados no setor de Fundições*, Tese de Doutorado, ICMC-USP/SC.
- [5] Bahl, H. C., L. P Ritzman, e J. N. D Gupta (1987). Determining Lot Sizes and Resource Requirements: A Review. *Operations Research*, 35, 329-345.
- [6] Billington, P. J., McClain, J. O. e Thomas, L. J. (1983), Mathematical Programming Approaches to Capacity MRP Systems: Review, Formulation and Problem Reduction, *Management Science*, v. 29, n. 10, p. 1126-1141.
- [7] Bowers, M. R., Kaplan, L. A. e Hooker, T. L. (1995). A Two-Phase Model for Planning the Production of Aluminum Ingot. *European Journal of Operational Research*, 81, 105-114.
- [8] Cerny, V. (1985). A Thermodynamical Approach to The Traveling Salesman Problem: an Efficient Simulation Algorithm. *Journal of Optimization Theory and Applic.*, 45, 41-55.
- [9] Clark, A. R. e Clark, S. J. (2000), Rolling-Horizon Lot-Sizing When Setup Times are Sequence-Dependent, *International Journal of Production Research*, v. 38, n. 10, p. 2287-2307.
- [10] Drexl, A. e Kimms, A. (1997). Lot Sizing and Scheduling - Survey and Extensions. *European Journal of Operational Research*, 99, 221-235.
- [11] Fourer, R., Gay, D. M. e Kernighan B. W., (1993). *AMPL- A Modeling Language for Mathematical Programming*. Boyd and Frase, Danvers, Massachusetts. <http://www.ampl.com>.
- [12] Gonçalves-Vianna, A. C. e Arenales, M. (1995), Problema de Programação da Produção numa Fundição Automatizada, *Gestão & Produção*, v.2, p. 244-263.
- [13] Gravel, M., Price, W. L. e Gagné, C. (2000). Scheduling Jobs in an Alcan Aluminium Foundry Using a Genetic Algorithm. *International Journal of Production Research*, 38 (13), 3031-3041.
- [14] Goyal, S. K. e Gunasekaran, A. (1990), Multi-Stage Production-Inventory Systems, *European Journal of Operational Research*, v. 46, p. 1-20.
- [15] Hamada, K., Baba, T., Sato, K. e Yufu, M. (1995). Hybridizing a Genetic Algorithm with Rule-based Reasoning for production Planning. *IEEE Expert*, 10, 60-67.
- [16] Hendry, L. C., Fok, K. K. e Shek, K. W. (1996). A Cutting Stock and Scheduling Problem in the Copper Industry. *Journal of Operational Research Society*, 47 (1), 38-47.
- [17] ILOG CPLEX 7.1 User's Manual, (2001). ILOG S.A., BP 85, 9 Rue de Verdun, 94253 Gentilly Cedex, France. <http://www.ilog.com>.

- [18] Kuik, R., Salomom, M. e Van Wassenhose, L. N. (1994). Batching Decisions: Structure and Models. *European Journal of Operational Research*, 75, 243-263.
- [19] Lee, H. S., Murthy, S. S., Haider, S. W. e Morse, D. V. (1996). Primary Production Scheduling at Steelmaking Industries. *IBM Journal of Research and Development*, 40 (2), 231-252.
- [20] Lopes, L., Carter, M. W. e Gendreau, M. (1998). The Hot Strip Mill Production Scheduling Problem: a tabu Search Approach. *European Journal of Operational Research*, 106, 317-335.
- [21] Maes J. e van Wassenhove, L. N. (1988), Multi-Item Single-Level Capacitated Dynamic Lot-Sizing Heuristics: A General Review, *Journal of Operational Research Society*, v. 39, n. 11, p. 991-1004.
- [22] Petersen, C. M., Sorensen, K. L. e Vidal, R. V. V. (1992). Inter-process Synchronization in the Steel Production. *International Journal of production Research*, 30 (6), 1415-1425.
- [23] Potts, C. N. e Van Wassenhove, L. N. (1992). Integrating Scheduling with Batching and Lot-Sizing: a Review of Algorithms and Complexity. *Journal of Operational Research Society*, 43 (5), 395-406.
- [24] Potts, C. N. e Kovalyov, M. Y. (2000). Scheduling with Batching: a review. *European Journal of Operational Research*, 120, 228-249.
- [25] Santos-Meza, E., Santos, M. O. e Arenales, M. N. (2002). A Lot-Sizing Problem in an Automated Foundry. *European Journal of Operational Research*, 139 (2), 490-500.
- [26] Sounderpandian, J. e Balashanmugam, B., (1991). Multiproduct, Multifacility scheduling Using the Transportation Model: a Case Study. *Production and Inventory Management Journal*, 32 (4), 69-73.
- [27] Tang, L., Liu, J. Rong, A. e Yang, Z. (2000a). A Mathematical Programming Model for Scheduling Steelmaking-Continuous Casting Production. *European Journal of Operational Research*, 120, 423-435.
- [28] Tang, L., Liu, J. Rong, A. e Yang, Z. (2000b). A Multiple Traveling Salesman Problem Model for Hot Rolling Scheduling in Shanghai Baoshan Iron & Steel Complex. *European Journal of Operational Research*, 124, 267-282.
- [29] Tang, L., Liu, J. Rong, A. e Yang, Z. (2001). A Review of Planning and Scheduling Systems and Methods for Integrated Steel Production. *European Journal of Operational Research*, 133, 1-20.
- [30] ABIFA - Associação Brasileira de Fundição (2004). Relatório anual do setor de fundição, <http://www.abifa.org.br>.
- [31] Karimi B., Fatemi Ghomia S. M. T. e Wilson J. M. (2003). The capacitated lot sizing problem: A review of models and algorithms. *Omega*, v. 31, p. 365-378.