

## Suavização da Fronteira DEA: o Caso BCC Tridimensional

João Carlos C. B. Soares de Mello \*      Eliane Gonçalves Gomes †  
Luiz Biondi Neto ‡      Marcos Pereira Estellita Lins §

\* Depto. de Engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense – Brasil  
jcsmello@sapo.pt

† Embrapa Monitoramento por Satélite – Brasil  
eliane@cnpm.embrapa.br

‡ Depto. de Eletrônica e Telecomunicações – Universidade do Estado do Rio de Janeiro – Brasil  
lbiondi@embratel.net.br

§ Programa de Engenharia de Produção – Universidade Federal do Rio de Janeiro – Brasil  
lins@pep.ufrj.br

---

### Abstract

The multipliers DEA model has multiple optimal solutions in the extreme-efficient DMUs. This fact is a drawback in several applications, particularly when we need to know the tradeoffs and in Cross-Evaluation. We propose a solution using the geometric representation of DEA envelope model. In this representation the frontier is piece-wise linear, meaning that for the extreme-efficient DMUs there is no tangent plan to the DEA frontier, as these DMUs are the cusps of the faces. The solution consists in changing the original frontier by another with continuous partial derivatives in every point and being as close as possible to the original one. We obtained a smoothed frontier with similar properties to the original, but with tangent plans at all points. The multipliers are obtained from the tangent plans equations. We present the general case theoretical development, which makes use of a non-metric topology based on the generalisation of the arch length, whose minimisation leads to a non-exactly soluble variational problem. Approximate solutions are obtained by the Ritz variational method. We present the particular case of the three-dimensional DEA BCC model, applied to the evaluation of Brazilian airlines companies.

### Resumo

O modelo dos multiplicadores em DEA admite múltiplas soluções óptimas nas DMUs extremo-eficientes. Este facto acarreta dificuldades em várias aplicações, em especial quando há necessidade do conhecimento de razões de substituição (*tradeoffs*) e em Avaliação Cruzada. Neste artigo é proposta uma solução para este problema, com o uso da

representação geométrica obtida do modelo do envelope. Nesta representação a fronteira é linear por partes, o que significa que nas DMUs extremo-eficientes não existe plano tangente à fronteira DEA, por serem estas DMUs os vértices das faces. Através da substituição da fronteira original por uma outra com derivadas contínuas em todos os pontos e o mais próximo possível da original, é obtida uma fronteira com propriedades semelhantes à original, mas com planos tangentes em todos os pontos. Da equação destes planos calculam-se os coeficientes do modelo dos multiplicadores. É apresentado o desenvolvimento teórico para o caso geral, que usa uma topologia não métrica baseada na generalização do comprimento de arco, cuja minimização conduz a um problema variacional sem solução exacta. Soluções aproximadas são obtidas pelo método variacional de Ritz. É exemplificado o caso particular do modelo DEA BCC tridimensional, aplicado à avaliação de companhias aéreas brasileiras.

**Keywords:** DEA, Variational Methods, Smoothed Frontier, Airlines Evaluation

**Title:** A smoothed frontier for the 3-dimensional BCC-DEA model

---

## 1 Introdução

A Análise de Envoltória de Dados (*Data Envelopment Analysis* – DEA) foi desenvolvida por Charnes, Cooper e Rhodes (1978) para determinar a eficiência de unidades productivas (*Decision Making Units* – DMUs), onde não seja predominante ou não se deseja considerar somente o aspecto financeiro. A metodologia DEA permite avaliar a eficiência de cada DMU considerando-se os recursos de que dispõe (*inputs*) e os resultados alcançados (*outputs*).

Os modelos DEA clássicos, como modelos de programação matemática, apresentam sempre formulações duais. Existem, assim, duas formulações equivalentes para DEA (Cooper et al., 2000). De forma simplificada, pode-se dizer que uma das formulações (modelo do Envelope) define uma região viável de produção e trabalha com uma distância de cada DMU à fronteira desta região. A outra formulação (modelo dos Multiplicadores) trabalha com a razão de somas ponderadas de produtos e recursos, sendo a ponderação escolhida de forma mais favorável a cada DMU, respeitando-se determinadas condições.

As duas formulações, como problemas duais que são, fornecem, evidentemente, a mesma eficiência para cada DMU. No entanto, além da eficiência, outras informações podem ser extraídas dos modelos citados. O modelo do envelope fornece os coeficientes de ponderação de cada DMU eficiente (denominados  $\lambda_i$ ) na formação da DMU virtual que serve de *benchmark* para cada DMU ineficiente. Dada uma determinada orientação, esses coeficientes são determinados de forma única para cada DMU. É de especial interesse observar o que ocorre nas DMUs eficientes: elas são o seu próprio *benchmark* e, assim, o PPL do envelope fornece valor 1 para o  $\lambda$  referente a essa DMU e zero para todas as demais. Tem-se assim um PPL altamente degenerado.

Já o modelo dos multiplicadores fornece os coeficientes de ponderação que cada DMU atribui a cada *input* e *output*. O facto de cada DMU atribuir valores diferentes a esses multiplicadores é a essência de DEA. Cada DMU tem a liberdade de valorizar aquilo em que é melhor, ignorando as variáveis em que o seu desempenho não é bom. Qualquer modelo DEA deve preservar, em menor ou maior grau, essa liberdade.

Existem várias interpretações para os multiplicadores (também denominados “pesos”). A mais comum afirma que cada peso é um indicador da importância que uma DMU atribui à variável correspondente na determinação da sua eficiência. Essa interpretação só é válida, sem cálculos adicionais, se as variáveis forem previamente normalizadas.

Economicamente, os multiplicadores podem ser interpretados de duas formas. A primeira interpretação é como componentes da razão de ponderação entre as variáveis (*tradeoffs*), ou seja, quanto uma DMU deve aumentar em um *input* quando outro diminui de uma unidade, ou quanto um aumento de um *input* deve provocar de aumento em um *output*. Uma interpretação ainda mais importante é que os multiplicadores são pesos sombra (*shadow prices*) normalizados (Coelli et al., 1998). Essa interpretação é bastante útil para determinar preços de quantidades sem valor de mercado, bastando para tal conhecer o custo efectivo de alguma das variáveis. Com esse conhecimento, os preços sombras normalizados transformam-se em preços não normalizados. Reinhard et al. (2000) usam essa abordagem para calcular o preço da poluição em um estudo sobre eficiência ambiental. Cabe ressaltar mais uma vez que para cada DMU existe um conjunto de pesos diferentes, o que significa que os preços calculados para certa DMU são válidos apenas para ela.

O uso prático das interpretações dos multiplicadores esbarra em uma dificuldade inerente ao PPL do modelo dos multiplicadores. De facto, o teorema das folgas complementares também permite afirmar que os multiplicadores são os coeficientes da equação do hiperplano tangente à fronteira no ponto de projecção da DMU (Lins e Angulo-Meza, 2000). Ora, as DMUs eficientes (mais propriamente, as extremo-eficientes) formam os vértices da fronteira e nelas, por não existirem derivadas, não existe hiperplano tangente, embora exista uma infinidade de hiperplanos suporte. A Figura 1 ilustra essa situação para o caso de um *input* e um *output*. Tem-se, portanto, uma infinidade de multiplicadores para cada DMU extremo-eficiente, todos eles conduzindo à eficiência 1 para essas DMUs. Portanto, além de cada DMU ter liberdade para determinar os seus próprios pesos (o que é desejável), para as DMUs que devem servir de exemplo, como detentoras de boas práticas de gestão, é impossível saber quais os pesos que elas efectivamente atribuíram a cada variável. A determinação da importância de cada *input* e *output*, ou o cálculo de pesos sombra, fica assim comprometido quando se lida com DMUs extremo-eficientes.

A ausência de valores únicos para os pesos das DMUs extremo-eficientes tem ainda consequências de natureza diferente. Do ponto de vista teórico, impede o cálculo de derivadas direccionais em toda a fronteira. Do ponto de vista prático é um obstáculo ao uso de DEA como ferramenta auxiliar em problemas multicritério. Em certas situações é desejável em um problema multicritério atribuir pesos aos critério sem julgamentos de valor do decisor (por exemplo, quando vários decisores não chegam a acordo). DEA seria uma óptima ferramenta para isso, não fosse o facto de que não são conhecidos os pesos atribuídos por algumas DMUs. É óbvio que se o número de DMUs extremo-eficientes for pequeno em relação ao total do número de DMUs, pode-se ignorar os pesos atribuídos pelas extremo-eficientes e trabalhar apenas com os pesos atribuídos pelas demais DMUs (Lins et al., 2003; Soares de Mello et al., 2002 [27]).

O problema da não unicidade dos multiplicadores para as DMUs extremo-eficientes foi várias vezes abordado, mas com soluções deficientes. Charnes et al. (1985) já haviam reconhecido esse problema, quando propuseram o uso arbitrário de um valor único para as derivadas através do cálculo de uma média ponderada, baseado nos baricentros das hipersuperfícies con-

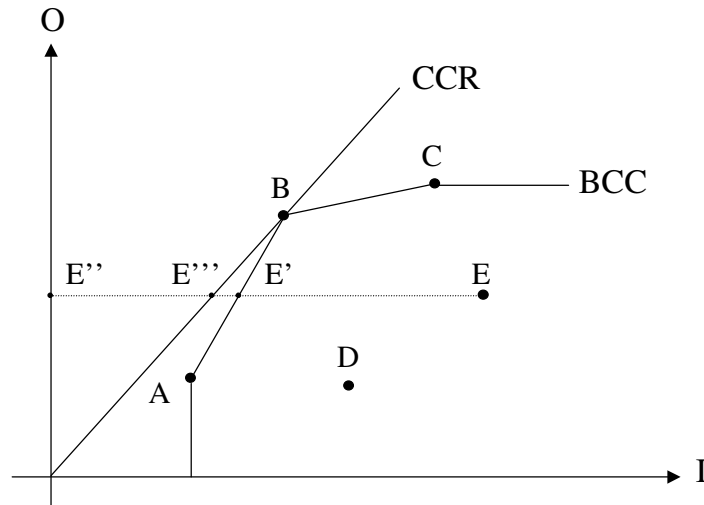


Figura 1: Representação das fronteiras BCC e CCR para o caso bidimensional.

correntes. Esse método apresenta várias desvantagens. Entre elas a necessidade de conhecer as equações de todas as faces (o que exige um algoritmo de complexidade NP – Fukuda, 1993), a existência de variações bruscas devido à descontinuidade das derivadas e a impossibilidade de ser aplicado em DMUs que marquem o início da região Pareto ineficiente, ou que sejam adjacentes a uma face de dimensão incompleta (Olesen e Petersen, 1996).

Talvez por todas essas desvantagens, o método não costuma ser usado. Muitos autores fazem análises que ignoram o problema ou, quando muito, após referencia-lo usam os valores da 1ª solução ótima encontrada pelo algoritmo implementado (Thanassoulis, 1993; Chilingirian, 1995).

Em algumas situações específicas são possíveis soluções parciais. Doyle e Green (1994) introduzem o conceito de formulações agressiva e benevolente no seu modelo de avaliação cruzada. O modelo de super-eficiência (Andersen e Petersen, 1993), apesar de não apresentar esse problema, apresenta, no entanto, outras desvantagens. Em primeiro lugar não limita as eficiências ao intervalo  $[0,1]$ . Além disso, elimina uma restrição diferente no PPL de cada DMU, o que significa dizer que a fronteira eficiente apresenta uma configuração diferente dependendo da DMU analisada.

Segundo Rosen et al. (1998), os valores dos multiplicadores podem variar entre o valor calculado com base na derivada à esquerda e o calculado com base na derivada à direita. Esses autores afirmam ser impossível contornar essa multiplicidade de valores e fazem a proposta de um quadro SIMPLEX modificado para calcular os limites de variação dos multiplicadores.

A impossibilidade referida por Rosen et al. (1998) decorre da natureza linear por partes da fronteira DEA. Soares de Mello et al. (2001, 2002 [28]) mostram que é possível contornar essa impossibilidade mediante a substituição da fronteira DEA original por outra que tenha propriedades semelhantes, mas continuamente diferenciável. Entre as propriedades mantidas, está a atribuição de eficiência unitárias às DMUs extremo-eficientes do modelo DEA original. A técnica, discutida em termos gerais e exemplificada para casos de duas dimensões, consiste em suavizar a fronteira DEA original, respeitando as propriedades básicas de DEA: convexidade, monotonicidade crescente dos *inputs* com os *outputs*, mesmas DMUs eficientes e atribuição de

pesos diferentes por cada DMU.

O principal problema dessa técnica é que, do modo como foi apresentada, servia apenas para casos bidimensionais, de pouca importância prática. Este artigo expande os resultados obtidos por Soares de Mello et al. (2001, 2002 [28]) ao estudar o caso de suavização da fronteira DEA para o modelo BCC tridimensional, fazendo uso do mesmo referencial teórico.

O modelo que será aqui apresentado permite determinar valores únicos para os multiplicadores usados por cada DMU eficiente. Além disso, preserva a fronteira tão próximo quanto possível da original e, evidentemente, mantém a liberdade de cada DMU determinar os seus próprios multiplicadores.

Um conceito essencial aos desenvolvimentos teóricos é o de proximidade entre superfícies, que é um conceito topológico. Assim, no item 2 apresentam-se os aspectos topológicos do problema de suavização. No item 3 resumem-se os métodos variacionais usados. No item 4 é exposta a teoria geral de suavização, apresentando-se a formulação para o caso BCC tridimensional no item 5. Foi realizado um caso de estudo sobre eficiência de companhias aéreas brasileiras, que é mostrado no item 6. Seguem-se as conclusões (item 7) e as referências bibliográficas.

## 2 Topologia da Suavização

As métricas funcionais clássicas lidam normalmente com distâncias entre os valores das funções. No entanto, no problema de suavização da fronteira DEA é de extrema importância a distância entre as derivadas, cujo tratamento pelas métricas funcionais clássicas é bastante complexo. É necessário estabelecer uma forma de determinar proximidade entre funções, que não seja uma das formas tradicionais e que seja útil no problema de suavização da fronteira DEA.

No caso bidimensional, a região da fronteira que contém 2 DMUs eficientes consecutivas é um segmento de reta. Como o segmento de reta é o menor comprimento de arco entre dois pontos, qualquer outra curva que ligue os 2 pontos terá um comprimento de arco maior, tanto maior quanto mais se afastar do segmento. Além disso, quanto mais oscilar em torno do segmento (o que significa a existência de derivadas de valor bem diferente da inclinação da reta suporte do segmento) maior também será o comprimento de arco. Assim, definir se a fronteira suavizada está na vizinhança da fronteira original usando as diferenças entre seus comprimentos de arco significa considerar tanto o valor da função quanto o da sua derivada. Como a fronteira original é composta só de segmentos de reta não é necessário calcular a diferença de comprimento de arco entre a fronteira original e a fronteira suavizada; basta minimizar o comprimento de arco da fronteira suavizada que garante-se a proximidade dela com a original.

Na Figura 2 observa-se que uma função  $h$  obtida de  $f$  por simetria em relação ao segmento de reta que une as duas DMUs eficientes, tem o mesmo comprimento de arco de  $f$ , ou seja, duas funções distintas com diferença nula de comprimento de arco. Portanto, o comprimento de arco não gera uma métrica, embora gere uma topologia não métrica (D'Ambrósio, 1977). Não se deve falar em distância entre duas fronteiras, mas apenas em proximidade, ou pertinência a uma vizinhança.

Os mesmos argumentos podem ser generalizados para problemas de dimensão superior,

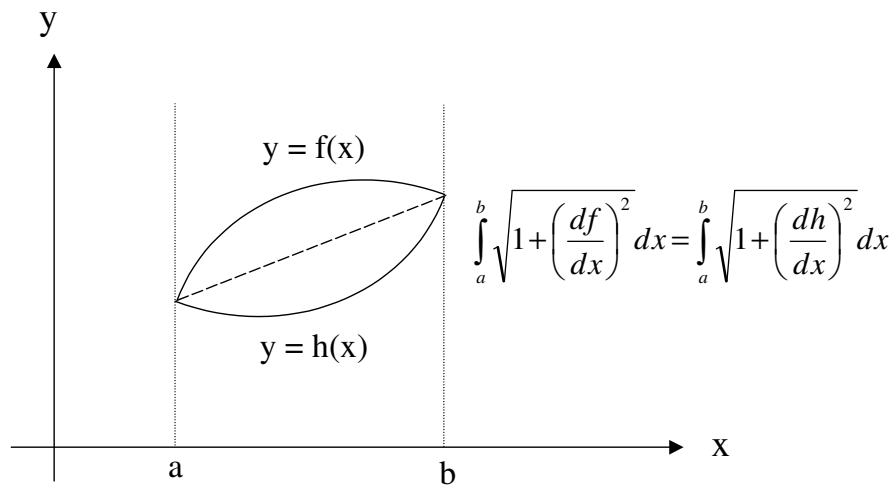


Figura 2: Invariância de comprimento de arco na simetria.

substituindo-se segmento de reta por uma região do hiperplano e integral simples por integral múltiplo.

O espaço gerado através dessa topologia tem a característica de não ser Hausdorff separável (Hausdorff, 1949). Nesse tipo de espaço pode não ser possível distinguir dois elementos pelas propriedades topológicas, o que obrigará a restrições adicionais ao problema de minimização do comprimento de arco, de forma a evitar soluções indesejáveis.

### 3 Métodos Variacionais

Enquanto a programação matemática trata de calcular valores de variáveis independentes que otimizam uma função, o Cálculo das Variações visa determinar funções que otimizam uma “função de funções” ou funcional (Boyer, 1978; Elsgolts, 1980; Soares de Mello, 1987; Smith, 1998).

Formalizando o conceito anterior, considere-se  $I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$ , onde  $y = f(x)$ ,  $f(x_1) = a$  e  $f(x_2) = b$ . O valor deste integral (que tem o nome de funcional) varia para cada função escolhida. Pode existir determinada função para a qual o integral assuma um valor mínimo.

A busca da função que minimiza o funcional é feita por meio da resolução de uma equação diferencial ordinária. Essa equação é uma condição necessária para a existência de mínimo e pode ser obtida por dois métodos encontrados em, entre outros, Elsgoltz (1980) e Soares de Mello (1987). Aplicando-se um desses métodos, obtém-se a equação (I).

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (\text{I})$$

Essa equação, conhecida como Equação de Euler-Lagrange (Elsgolts, 1980), deve ser resolvida com as condições de contorno apropriadas.

O resultado anterior pode ser generalizado para o caso de ter-se  $I[U(x_1, x_2, \dots, x_n)] =$

$\int_R F(x_1, x_2, \dots, x_n, U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n}) dR$ , com as condições de contorno adequadas (geralmente prescrição do valor de  $U$  ou de suas derivadas na fronteira da região de integração).

Os mesmos métodos, usados junto com o teorema de Gauss (Soares de Mello et al., 1987), conduzem à equação (II).

$$F_u - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial F}{\partial U_{x_i}} \right) = 0 \tag{II}$$

Essa é a versão  $n$ -dimensional da Equação de Euler-Lagrange, que deve ser resolvida com as condições de contorno apropriadas.

Devido à sua não linearidade, a equação de Euler-Lagrange só tem solução analítica em alguns casos particulares. Para resolver os problemas em que não é possível determinar a solução exacta surgiram os chamados métodos directos ou métodos variacionais. De forma geral, esses métodos consistem em restringir o conjunto no qual procura-se a solução para o problema variacional: consideram-se candidatas à solução apenas alguns tipos especiais de funções, e não qualquer função com derivadas de segunda ordem. A solução encontrada será um ótimo no conjunto considerado embora não seja um ótimo global.

Entre os métodos directos podem-se citar os métodos de Ritz (Smith, 1998), que para o caso particular de funcionais com funções de uma variável independente do tipo  $I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ , o funcional toma valores apenas para todas as funções do tipo (III), em vez de assumir valores para quaisquer funções  $y(x)$ .

$$y_m = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x) \tag{III}$$

As funções  $w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x)$  são previamente escolhidas e denominam-se funções aproximantes. Os  $\alpha_i$  são números reais e para cada sequência destes números obtém-se uma função  $y_m(x)$ . Essas funções devem satisfazer às mesmas condições de contorno (restrições) do problema variacional original.

Substituindo-se  $y$  e  $y'$  por  $y_m$  e  $y'_m$  no funcional  $I$  e calculando-se o integral, obtém-se uma função  $I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . Uma condição suficiente para a optimização dessa função é dada pelo sistema de equações (IV).

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_i} = 0, \forall \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n \tag{IV}$$

Calculados os  $\alpha_i$  obtém-se um  $y_m(x)$  que é uma solução aproximante para o problema proposto.

É possível escolher  $w_i$  como sendo potências de  $x$ , de tal forma que  $y_m$  seja um polinómio. Em Soares de Mello (1987) são vistos vários exemplos de uso deste método com polinómios quadráticos e é mostrado que eles apresentam bons resultados na solução das equações de Laplace e Poisson.

Os resultados aqui apresentados podem ser generalizados para dimensões superiores, bastando utilizar funções aproximantes com várias variáveis independentes e integrais múltiplos.

## 4 Formulação Geral do Modelo de Suavização

Serão considerados modelos DEA com apenas 1 *output*, nos quais a suavização consiste em procurar uma função que minimize o comprimento de arco (ou sua generalização  $n$ -dimensional), que contenha as DMUs Pareto eficientes e que tenha derivadas parciais de segunda ordem em todos os pontos. Por facilidade computacional, pode-se minimizar o quadrado do comprimento de arco, sem alterar o resultado. Então, após determinar as DMUs extremo-eficientes no modelo DEA clássico, a suavização é obtida pelo problema variacional (V).

$$\begin{aligned} \min L &= \int_R \left[ 1 + \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \right] dS \\ \text{sa} & \\ F(\vec{X}_j) &= \text{output}(\vec{X}_j), \quad \forall \vec{X}_j \in E = \left\{ \vec{X} : \vec{X} \text{ é DMU Pareto eficiente} \right\} \\ \forall \vec{X}_j &\exists \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{\vec{X} = \vec{X}_j} \end{aligned} \tag{V}$$

Na última restrição de (V) é particularmente importante garantir a existência das derivadas nos pontos correspondentes às DMUs extremo-eficientes, por serem estes os pontos de descontinuidade das derivadas na fronteira original. Isto pode ser conseguido com a imposição de derivadas laterais iguais no caso de se usar aproximantes diferentes em cada região da fronteira, ou escolhendo um único aproximante para toda fronteira que tenha derivadas em todo seu domínio. Esse é um problema de Cálculo das Variações, que tem como equação de Euler-Lagrange  $\nabla^2 F = \sum_i \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0$ .

A última equação é a bem conhecida equação de Laplace  $n$ -dimensional (Farlow, 1993), que deve ser resolvida, se possível, com as condições de contorno adequadas. Como a topologia usada não garante a separação de Hausdorff são necessárias condições de contorno adicionais para bem caracterizar o problema. Essas condições adicionais serão obtidas das propriedades de cada modelo DEA usado.

### 4.1 Modelo BCC com um *output*

A existência de apenas um *output* permite escrever  $O = f(I)$ . Para garantir que  $f$  é realmente uma função, seu gráfico não pode apresentar regiões verticais, ou seja, não haverá regiões Pareto ineficientes na fronteira suavizada.

O facto do modelo ser BCC (Banker et al., 1984) significa que a fronteira é convexa o que, como corolário do Teorema do Valor Médio (Swokowski, 1995), obriga a que  $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} \leq 0$ . Com esta restrição adicional obtém-se o Teorema da Inexistência de Solução Óptima.

#### **Teorema da Inexistência de Solução Óptima**

*O problema de suavização da fronteira com uma topologia baseada no comprimento de arco em um modelo BCC com um output ou não tem sentido, ou não tem solução.*

*Prova:*

1. As derivadas segundas são sempre nulas. Neste caso a fronteira é um hiperplano que



contém todas as DMUs eficientes. A fronteira original já tem as características de suavidade e o problema não tem sentido.

2. Em pelo menos um ponto uma das derivadas segundas é negativa. Como neste ponto as outras derivadas segundas são negativas ou nulas, a sua soma é negativa, o que contraria a equação de Laplace.

Simbolicamente,  $\exists a_i \neq 0 : \nabla^2 F = \sum_i \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = \sum_i -a_i^2 < 0$ , e  $\nabla^2 F = 0$ , ou seja, o problema é impossível. ■

É necessário interpretar o que significa a impossibilidade do problema. O problema proposto é determinar a fronteira suave que melhor se aproxima da fronteira original, usando uma topologia baseada no comprimento de arco. Afirmar que o problema é impossível significa dizer que não existe solução que “melhor se aproxima”. Dada uma fronteira suave, sempre será possível determinar uma outra (e, portanto, uma infinidade) que seja uma melhor aproximação da original. O facto de não ter a melhor aproximação não impede que existam boas aproximações, que poderão ser calculadas usando métodos variacionais, em especial uma adaptação do método de Ritz (Smith, 1998). Esse método consiste em substituir a procura da melhor função de todas pela procura da melhor função de uma classe particular de funções chamadas aproximantes.

O cálculo das funções aproximantes usa uma abordagem oposta à do método dos Elementos Finitos (Reddy, 1993), na qual existe uma superfície desconhecida a ser aproximada por um conjunto de funções polinomiais, justapostas em pontos convenientes. Na suavização da fronteira DEA existem as funções polinomiais, justaposta em pontos previamente determinados pelos dados do problema, a serem substituídas por uma função diferenciável desconhecida.

## 4.2 Modelo CCR com um *output*

Neste modelo a condição de convexidade é substituída pela proporcionalidade: aumentos proporcionais nos *inputs* provocam um aumento proporcional no *output*. Ou seja,  $F(k \cdot \vec{X}) = k \cdot F(\vec{X})$ , o que significa que  $F$  tem que ser homogénea de grau 1 (Coelli et al., 1998). Como tal, deve respeitar o teorema de Euler para funções homogéneas:  $\vec{X} \cdot \vec{\nabla} F = nF$ , ou, como  $n = 1$ ,  $\vec{X} \cdot \vec{\nabla} F = F$ . Esta restrição impede uma livre escolha de aproximantes que são, obrigatoriamente, funções homogéneas de 1º grau. Entretanto, este caso foge ao escopo deste artigo.

## 5 Suavização do Modelo DEA BCC Tridimensional (2 *inputs* e 1 *output*)

Em Soares de Mello et al. (2001) usou-se um aproximante polinomial de 2º grau para cada região da fronteira (caso bidimensional), ou seja, havia uma correspondência biunívoca entre aproximantes e faces Pareto eficientes. Isso foi possível graças à determinação geométrica das faces eficientes. Em casos de maior dimensão, a determinação das faces exige um algoritmo de complexidade NP, o que pode inviabilizar o uso de aproximantes específicos.

Tabela 1: Relação entre o número de DMUs extremo-eficientes e o grau do polinómio.

<i>Número de DMUs extremo-eficientes</i>	<i>Grau do polinómio</i>
3 – 5	2
6 – 9	3
10 – 14	4
15 – 20	5
21 – 27	6
.....	.....

Mesmo em problemas em que a inviabilidade prática não ocorra, outras razões não recomendam o uso de aproximantes específicos para cada face:

- A dificuldade de garantir a continuidade da fronteira nas arestas, mesmo que esteja garantida a continuidade nos vértices.
- A geometria da fronteira pode acarretar um número de restrições de igualdade maior que o número de variáveis de decisão, fornecidas por um polinómio de 2<sup>o</sup> grau.
- A existência de faces de dimensão não completa pode impedir o cálculo de derivadas nos vértices, o que impede a imposição de restrições de suavidade.

Assim, adoptou-se um aproximante polinomial único para toda fronteira. Com isso, pode ocorrer a necessidade de trabalhar com funções polinomiais de grau mais elevado. Por exemplo, se houver a necessidade do uso de um polinómio de grau 4, ter-se-ia a equação (VI), na qual  $x$  e  $y$  são os *inputs* e  $Z$  é o *output*.

$$Z = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^3 + hx^2y + ixy^2 + jy^3 + kx^4 + lx^3y + mx^2y^2 + nxy^3 + oy^4 \quad (\text{VI})$$

A Tabela 1 mostra a relação que deve existir entre o número de DMUs extremo-eficientes e o grau do polinómio para a escolha do aproximante em cada caso real, de modo que seja garantido que o número de restrições de igualdade seja inferior ao número de variáveis de decisão (coeficientes do polinómio). As restrições de igualdade garantem que a fronteira suavizada contenha todas as DMUs extremo-eficientes, embora possa não conter DMUs eficientes que não sejam “cantos” da fronteira. A exclusão dessas DMUs é para evitar inviabilidades no problema de suavização (Soares de Mello et al, 2001).

A formulação (VII) representa o modelo DEA tridimensional suavizado. A função objectivo é dada pelo integral duplo, onde  $y_{min}$ ,  $x_{min}$ ,  $y_{max}$  e  $x_{max}$  representam o menor e o maior valor de cada *input*. A restrição (VII.1) garante que as DMUs extremo-eficientes estejam contidas na fronteira suavizada. As restrições (VII.2) e (VII.3) garantem a monotonicidade crescente da fronteira. A convexidade é garantida por (VII.4) e (VII.5). Estas seriam desnecessárias caso todas as DMUs fossem projectadas, no modelo DEA BCC clássico, em região Pareto eficiente; caso contrário, torna-se necessário garantir que nenhuma DMU seja projectada em região decrescente da fronteira.

$$\min \left\{ \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left[ 1 + \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 \right] dy dx \right\}$$

sa

$$Z(x_{efi}, y_{efi}) = Z_{efi} \tag{VII.1}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}(x_{\max}, y_{\max}) \geq 0 \tag{VII.2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}(x_{\max}, y_{\max}) \geq 0 \tag{VII.3}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \leq 0, \forall x, y \tag{VII.4}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \leq 0, \forall x, y \tag{VII.5}$$
(VII)

Dependendo do grau do polinómio pode ser impossível determinar os valores mais gerais possíveis dos coeficientes que garantam o cumprimento das restrições (VII.4) e (VII.5) para todos os valores de  $x$  e  $y$ . É possível garantir o cumprimento dessas restrições impondo-se uma restrição ainda mais forte, a saber, todos os termos do polinómio devem ser convexos. Isto é garantido na equação (VIII.4), que substitui as equações (VII.4) e (VII.5). O modelo (VIII) representa, assim, a formulação geral do modelo DEA BCC tridimensional suavizado, com garantia de convexidade.

$$\min \left\{ \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left[ 1 + \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 \right] dy dx \right\}$$

sa

$$Z(x_{efi}, y_{efi}) = Z_{efi} \tag{VIII.1}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}(x_{\max}, y_{\max}) \geq 0 \tag{VIII.2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}(x_{\max}, y_{\max}) \geq 0 \tag{VIII.3}$$

$$d, f, g, h, i, \dots \leq 0 \tag{VIII.4}$$
(VIII)

Observe-se que, uma vez que a função  $Z$  é polinomial, o integral duplo presente na função objectivo pode ser calculado como função quadrática dos coeficientes polinomiais. Dado que as restrições são lineares, o problema de suavização é um problema de programação quadrática. Esse problema foi resolvido em tempo desprezável pelos *softwares* mais comuns. Em alguns casos de pequena dimensão foi resolvido manualmente em tempo relativamente curto.

## 6 Caso de Estudo: Companhias Aéreas Brasileiras

O modelo apresentado no item 5 será aplicado a um caso de estudo retirado de um trabalho sobre avaliação de eficiência de companhias aéreas brasileiras (Gomes et al., 2001), que apresenta três modelos de cálculo de eficiência. Um desses modelos, chamado de Eficiência de Vendas, usa dois *inputs* e um *output*, a saber, Pessoal que trabalha em vendas, Número de Passageiros.Km oferecido durante o ano e Número de Passageiros.Km pago durante o ano, respectivamente.

As unidades avaliadas são as companhias aéreas regulares brasileiras, nos anos de 1998, 1999 e 2000. Considera-se que uma companhia em um determinado ano é uma DMU diferente da mesma companhia em outro ano. Além disso, companhias que formam grupos económicos foram consideradas como DMUs individuais e uma DMU representando o grupo, contemplando um total de 70 DMUs. Por exemplo, as companhias Nordeste, Rio Sul e Varig compõe o Grupo Varig, gerando 4 DMUs em cada um dos períodos analisados.

Tabela 2: Valores de *inputs* e *output* para as DMUs extremo-eficientes.

DMUs extremo-eficientes	<i>Pessoal de vendas</i>	<i>Pax.Km oferecido</i>	<i>Pax.Km pago</i>
Grupo VARIG 1998	3814	45361622	29139588
ITAPEMIRIM 1998	2	1773	732
PASSAREDO 1998	29	786974	530792
TAF 2000	9	2254	1289
VARIG 1998	3387	40690342	26751161
VASP 1998	427	17240645	9794282

Tabela 3: Valores mínimos e máximos de cada *input*.

	<i>DMU</i>	<i>Pessoal de Vendas</i>	<i>DMU</i>	<i>Pax.Km oferecido</i>
Mínimo	ITAPEMIRIM REGIONAL 1998	2	ITAPEMIRIM REGIONAL 1998	1773
Máximo	Grupo VARIG 1998	3814	Grupo VARIG 1998	45361622

A Tabela 2 traz os valores de *inputs* e *output* para as DMUs extremo-eficientes, que foram determinadas com o modelo DEA BCC clássico. Foram desconsideradas as companhias que apresentaram resultado distorcido por fazerem as vendas através de terceiros, ou seja, valor zero para o *input* Pessoal de vendas.

Como este é um modelo tridimensional com 6 DMUs extremo-eficientes, de acordo com a Tabela 1, a função aproximante é um polinómio de 3º grau com duas variáveis independentes.

Uma vez conhecidos os resultados do modelo DEA BCC clássico e com o uso dos valores das Tabelas 2 e 3, é possível formular o problema de suavização, que é apresentado em (IX). Comparando-se com a formulação geral (VIII),  $x$  representa o *input* Quantidade de pessoal de vendas,  $y$  o *input* Passageiros.Km oferecido,  $z$  é o *output* Passageiros.Km pago.

Tabela 4: Valor das variáveis de decisão do problema de suavização para o caso de estudo.

Variável de decisão	Valor
<i>a</i>	-536,629000
<i>b</i>	32,561460
<i>c</i>	0,678490
<i>d</i>	0,000000
<i>e</i>	0,000164
<i>f</i>	-1,2·10 <sup>-8</sup>
<i>g</i>	0,000000
<i>h</i>	-2,2·10 <sup>-8</sup>
<i>i</i>	0,000000
<i>j</i>	0,000000

$$\min \int_2^{3814} \int_{1773}^{45361622} \left[ (b + 2dx + ey + 3gx^2 + 2hyx + iy^2)^2 + (c + ex + 2fy + hx^2 + 2ixy^2)^2 \right] dy dx$$

sa

$$A \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,91 \cdot 10^7 \\ 732 \\ 5,31 \cdot 10^5 \\ 129 \\ 2,68 \cdot 10^7 \\ 9,79 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

$$d, f, g, h, i, j \leq 0$$

$$b + 7628d + 4,54 \cdot 10^7 e + 4,36 \cdot 10^7 g + 3,46 \cdot 10^{11} h + 2,06 \cdot 10^{15} i \leq 0$$

$$c + 3814e + 9,07 \cdot 10^7 f + 1,45 \cdot 10^7 h + 1,57 \cdot 10^{19} i \leq 0$$

onde

$$\begin{bmatrix} 38144,54 \cdot 10^7 & 1,45 \cdot 10^7 & 1,73 \cdot 10^{11} & 2,06 \cdot 10^{15} & 5,55 \cdot 10^{10} & 6,60 \cdot 10^{14} & 7,85 \cdot 10^{18} & 9,33 \cdot 10^{22} & 2,91 \cdot 10^7 \\ 2177343,55 \cdot 10^3 & 3,14 \cdot 10^6 & 87,09 \cdot 10^3 & 6,29 \cdot 10^6 & 5,57 \cdot 10^9 & 7,32 \cdot 10^2 \\ 297,87 \cdot 10^5 & 8412,28 \cdot 10^7 & 6,19 \cdot 10^{11} & 4,44 \cdot 10^4 & 6,62 \cdot 10^8 & 1,80 \cdot 10^{13} & 4,87 \cdot 10^{17} & 5,31 \cdot 10^5 \\ 92254812,03 \cdot 10^4 & 5,08 \cdot 10^6 & 7291,83 \cdot 10^5 & 4,57 \cdot 10^7 & 1,15 \cdot 10^{10} & 2,29 \cdot 10^3 \\ 33874,07 \cdot 10^7 & 1,15 \cdot 10^7 & 1,38 \cdot 10^{11} & 1,66 \cdot 10^{15} & 3,89 \cdot 10^{10} & 4,67 \cdot 10^{14} & 5,61 \cdot 10^{18} & 6,74 \cdot 10^{22} & 6,68 \cdot 10^7 \\ 4271,72 \cdot 10^7 & 1,82 \cdot 10^5 & 7,36 \cdot 10^9 & 2,97 \cdot 10^{14} & 7,79 \cdot 10^7 & 3,14 \cdot 10^{12} & 1,27 \cdot 10^{17} & 5,12 \cdot 10^{21} & 9,79 \cdot 10^6 \end{bmatrix} = A \tag{IX}$$

Esse, como qualquer problema de suavização em DEA, é um problema de programação quadrática, cuja solução fornece os valores dos coeficientes do polinômio de 3º grau que representa a fronteira suavizada. Esses valores são apresentados na Tabela 4. Deve-se referir que, para obter explicitamente o problema de programação quadrática, foi necessário calcular o integral duplo em um *software* de computação algébrica.

O gráfico da fronteira suavizada, válido na região  $(x_{min}, y_{min}), (x_{max}, y_{max})$ , é apresentado na Figura 3.

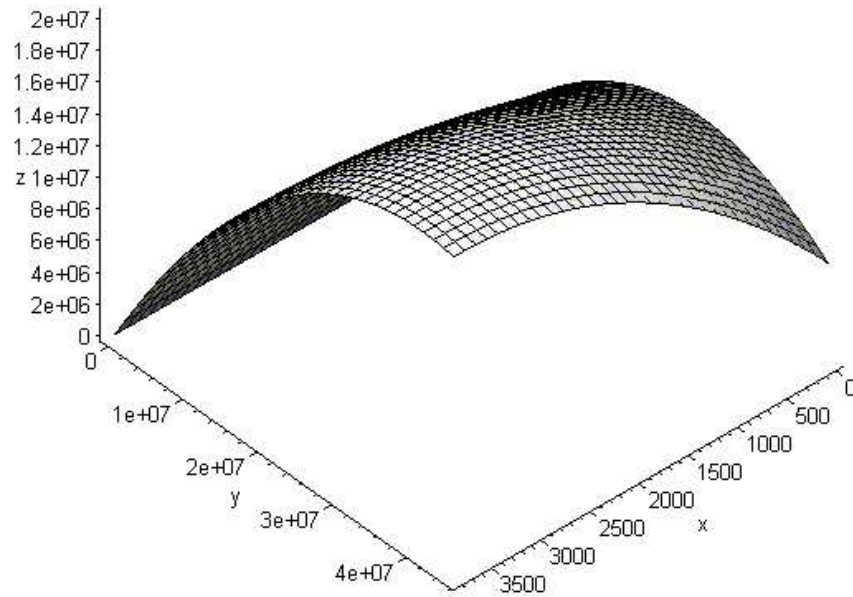


Figura 3: Fronteira suavizada para o caso de estudo.

Com as derivadas da função que representa a fronteira suavizada é possível calcular um valor único para os pesos dos *inputs* e do *output*. Com esses valores, pode-se computar a contribuição de cada *input* na formação do *input* virtual de cada DMU eficiente.

Os pesos são calculados a partir da formulação clássica dos multiplicadores (modelo (X)), na qual  $x$  e  $y$  representam os *inputs* e  $z$  o *output*.

$$\begin{aligned}
 & \max \text{Eff} = uz_0 - u_* \\
 & \text{sa} \\
 & v_x 0x_0 + v_y 0y_0 = 1 \\
 & v_{xk}x_k + v_{yk}y_k + u_k z_k - u_* \leq 0, \forall k \\
 & u \geq 0, v_x \geq 0, v_y \geq 0 \text{ e } u_* \text{ irrestrito}
 \end{aligned} \tag{X}$$

Ao usar a interpretação geométrica dos multiplicadores (Lins e Angulo-Meza, 2000) e a equação do plano tangente a uma superfície, obtêm-se as equações (XI) e (XII), que fornecem os valores únicos para os multiplicadores.

$$v_{xk} = \frac{\frac{\partial Z}{\partial x}(x_k, y_k)}{x_k \frac{\partial Z}{\partial x}(x_k, y_k) + y_k \frac{\partial Z}{\partial y}(x_k, y_k)} \tag{XI}$$

$$v_{yk} = \frac{\frac{\partial Z}{\partial y}(x_k, y_k)}{x_k \frac{\partial Z}{\partial x}(x_k, y_k) + y_k \frac{\partial Z}{\partial y}(x_k, y_k)} \tag{XII}$$

Das equações (XI) e (XII) obtêm-se as participações de cada *input* na formação do *input* virtual, apresentadas na Tabela 5.

Os resultados da Tabela 5 mostram que a maioria das DMUs atinge seu índice de eficiência atribuindo maior “importância” ao *input* Passageiros.Km oferecido. Como o numerador do modelo DEA aparece Passageiros.Km pago, os resultados aqui apresentados mostram que o

Tabela 5: Participações dos *inputs* na formação do *input* virtual.

<i>DMUs</i> <i>extremo-eficientes</i>	<i>Participação de</i> <i>Pessoal de Vendas</i>	<i>Participação de</i> <i>Pax.Km oferecido</i>
Grupo VARIG 1998	0,000	1,000
ITAPEMIRIM 1998	0,052	0,948
PASSAREDO 1998	0,009	0,991
TAF 2000	0,162	0,838
VARIG 1998	0,117	0,883
VASP 1998	0,131	0,869

Tabela 6: Multiplicadores de cada variável de *input* para cada DMU.

<i>DMUs</i> <i>extremo-eficientes</i>	<i>Peso do input</i> <i>Pessoal de Vendas (A)</i>	<i>Peso do input</i> <i>Pax.Km oferecido (B)</i>	$\frac{A}{B}$
Grupo VARIG 1998	$6,1 \cdot 10^{-20}$	$2,2 \cdot 10^{-8}$	0,0
ITAPEMIRIM 1998	$2,6 \cdot 10^{-2}$	$5,3 \cdot 10^{-4}$	48,4
PASSAREDO 1998	$3,0 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	241,5
TAF 2000	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$3,7 \cdot 10^{-4}$	48,4
VARIG 1998	$3,4 \cdot 10^{-5}$	$2,2 \cdot 10^{-8}$	1587,1
VASP 1998	$3,1 \cdot 10^{-4}$	$5,0 \cdot 10^{-8}$	6087,6

*load factor* (factor de ocupação) é uma legítima preocupação das companhias que operam na escala ótima.

Além da importância de cada *input*, a Tabela 6 mostra os multiplicadores de cada variável para cada DMU. Como já mencionado, eles representam preços sombra normalizados. Se for conhecido o custo real de um dos *inputs*, o custo do outro pode ser determinado pela razão entre os preços sombra. A coluna que apresenta o quociente entre os multiplicadores ( $A/B$ ) permite a obtenção dessa informação de forma rápida. Observa-se que o custo sombra unitário do *input* “Pessoal de vendas” é bem maior que o custo sombra do *input* “Passageiro.Km oferecido”. Essa conclusão só não pode ser aplicada ao Grupo VARIG 1998, já que essa DMU marca o início da região Pareto ineficiente.

Informações desse tipo são importantes não somente para que cada DMU analise a sua estrutura de preços e práticas gerenciais, mas também para que órgãos reguladores investiguem possíveis casos de *dumping* ou, pelo contrário, de preços abusivos.

## 7 Conclusões

Foi apresentada neste artigo uma metodologia para resolver o problema de determinação de pesos únicos em modelos DEA. A metodologia proposta tem como base a substituição da fronteira DEA original (linear por partes) por outra suavizada (com derivadas contínuas).

Em relação às propostas de outros autores para tratar do mesmo problema, a suavização da fronteira apresentou as seguintes vantagens:

- Fornece um valor único para os multiplicadores de cada DMU, em vez de um intervalo de variação, como em Rosen et al. (1998).
- Embora para cada DMU o vector de multiplicadores passe a ser unicamente determinado, cada DMU tem os multiplicadores mais apropriados às suas características. Essa é uma propriedade ausente de outro modelo que tenta resolver o mesmo problema: a avaliação cruzada de Doyle e Green (1994). Esse método é equivalente à adopção de pesos rígidos para todas as DMUs (Anderson et al., 2002), o que contraria um preceito básico de DEA. A metodologia de suavização, ao preservar a liberdade de cada DMU escolher o seu vector de multiplicadores, mantém-se fiel aos preceitos básicos de DEA.
- Fornece uma variação gradual dos multiplicadores, sem as descontinuidades do método proposto por Charnes et al. (1985). Nesse método, ao percorrer-se a fronteira encontram-se variações grandes nos multiplicadores para variações infinitesimais dos vectores de *outputs* e *inputs*, o que é uma situação pouco natural.
- Ao contrário do método de Charnes et al. (1985), não necessita da determinação de todas as faces adjacentes a cada DMU extremo-eficiente. Assim, após conhecer as DMUs extremo-eficientes, em vez de um problema NP, basta resolver um simples problema de programação quadrática.

Ainda em comparação com o método de Charnes et al. (1985), para a suavização não é problemática a existência de faces de dimensão não completa. Essas faces, que surgem com frequência (Gonzalez-Araya, 2002) impedem o uso de métodos baseados em propriedades geométricas.

Em relação ao modelo de super-eficiência, a maior vantagem é existir uma única fronteira eficiente, independentemente da DMU que se esteja a analisar.

Em relação aos métodos de suavização correntes em programação não linear (Koohyun e Yong-Sik, 1998; Gal, 1992), como o método da perturbação infinitesimal, o método aqui proposto apresentou as seguintes vantagens (Soares de Mello, 2002):

- Interfere o menos possível com o ponto de descontinuidade das derivadas, pela própria natureza das restrições do problema de programação quadrática. Refira-se que essa propriedade, irrelevante em programação matemática, é de extrema importância em DEA.
- Não necessita das equações da região a ser suavizada, apenas das coordenadas dos pontos de descontinuidade das derivadas, o que é conseguido devido à natureza linear por partes da fronteira original.
- É baseado numa formulação topológica precisa, que permite definir com rigor o conceito de proximidade entre a fronteira original e a suavizada.

O modelo de suavização apresenta cálculos relativamente simples para problemas de pequena dimensão (número de *inputs*, *outputs* e DMUs extremo-eficientes). O aumento da dimensão



leva a um aumento do número de cálculos algébricos. Como as várias etapas dos cálculos são realizadas em programas diferentes, e a etapa mais demorada é a transposição de dados entre eles, torna-se evidente a vantagem de desenvolver um *software* específico para o problema da suavização.

O caso investigado apresentou valores díspares para os vários coeficientes do polinómio de suavização. Tal facto deveu-se à grande amplitude de variação dos valores dos *inputs*, bem como a escala extremamente diferente em que eram medidos. Uma prévia normalização poderia reduzir essa disparidade.

Fazem-se necessários desenvolvimentos para o caso de múltiplos *inputs* e *outputs*, e para modelos com retornos constantes de escala (CCR). Esses modelos apresentam a dificuldade adicional da invariância dos retornos de escala, o que leva a funções homogêneas de grau zero e impede o uso de aproximantes polinomiais.

Por fim, deve ser mencionado que o modelo de suavização permite eliminar dois dos grandes problemas em DEA: regiões Pareto ineficientes e faces de dimensão não completa. O primeiro devido à existência de uma restrição de monotonicidade, e o segundo pelo facto de a fronteira ser descrita por uma única equação polinomial.

## 8 Referências Bibliográficas

- [1] Andersen, P., Petersen, N.C., A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis, *Management Science* 39 (10) (1993) 1261-1264.
- [2] Anderson, T.R., Hollingsworth, K., Inman, L., The Fixed Weighting Nature of A Cross-Evaluation Model, *Journal of Productivity Analysis* 17 (3) (2002) 249-255.
- [3] Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W., Some models for estimating technical scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis, *Management Science* 30 (9) (1984) 1078-1092.
- [4] Boyer, C.B., *História da Matemática*, Edgard Blücher Ltda., São Paulo (1978).
- [5] Charnes, A., Cooper, W.W., Golany, B., Seiford, L., Stutz, J., Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production functions, *Journal of Econometrics* 30 (1985) 91-107.
- [6] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E., Measuring the Efficiency of Decision-Making Units, *European Journal of Operational Research* 2 (1978) 429-444.
- [7] Chilingirian, J.A., Evaluating physician efficiency in hospitals: a multivariate analysis of best practices, *European Journal of Operational Research* 80 (1995) 548-574.
- [8] Coelli, T., Rao, D.S.P., Battese, G.E., *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*, Kluwer Academic Publishers (1998).
- [9] Cooper, W.W., Seiford, L.M., Tone, K., *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*. Kluwer Academic Publishers, USA (2000).
- [10] D'Ambrósio, U., *Métodos da Topologia - Introdução e Aplicações*, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, Rio de Janeiro (1977).
- [11] Doyle, J., Green, R., Efficiency and cross-efficiency in DEA: Derivations, meanings and uses, *Journal of the Operational Research Society* 45 (5) (1994) 567-578.
- [12] Elsgolts, L., *Differential Equations and the Calculus of Variations*, Mir Publishers, Moscow (1980).

- [13] Farlow, S.J., *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Dover Books on Advanced Mathematics, Dover Publications (1993).
- [14] Fukuda, K., *cdd.c: C Implementation of the Double Description method for computing all vertices and extremal rays of a convex polyhedron given a system of linear inequalities*, Department of Mathematics, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne, Switzerland (1993).
- [15] Gal, T., *Weakly redundant constraints and their impact on postoptimal analyses in LP*, *European Journal of Operational Research* 60 (3) (1992) 315-326.
- [16] Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B., Serapião, B.P., Lins, M.P.E., Biondi, L.N., *Avaliação de Eficiência de Companhias Aéreas Brasileiras: Uma Abordagem por Análise de Envoltória de Dados*. In: Setti, J.R.A., Lima Júnior, O.F. (Eds.), *Panorama Nacional da Pesquisa em Transportes 2001*, Campinas, SP, Novembro 2 (2001) 125-133.
- [17] Gonzalez-Araya, M.C., *Uma metodologia para projetar DMUS em facets eficientes de maior dimensão*, XXXIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional – SBPO, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, Outubro (2002).
- [18] Hausdorff, F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Chelsea Publishing Company, New York (1949).
- [19] Koohyun, P., Yong-Sik, S., *Iterative bundle-based decomposition for large-scale nonseparable convex optimization*, *European Journal of Operational Research* 111 (3) (1998) 598-616.
- [20] Lins, M.P.E., Angulo-Meza, L., *Análise Envoltória de Dados e perspectivas de integração no ambiente de Apoio à Decisão*, Editora da COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil (2000).
- [21] Lins, M.P.E., Gomes, E.G., Soares de Mello, J.C.C.B., Soares de Mello, A.J.R., *Olympic ranking based on a Zero Sum Gains DEA model*, *European Journal of Operational Research* 148 (2) (2003) 85-95.
- [22] Olesen, O.P., Petersen, N.C., *Indicators of III conditioned data sets and model misspecification in data envelopment analysis: and extended facet approach*, *Management Science* 42 (2) (1996) 205-219.
- [23] Reddy, J.N., *Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill (1993).
- [24] Reinhard, S., Lovell, C.A.K., Thijssen, G.J., *Environmental efficiency with multiple environmentally detrimental variables estimated with SFA and DEA*, *European Journal of Operational Research* 121 (2000) 287-303.
- [25] Rosen, D., Schaffnit, C., Paradi, J.C., *Marginal rates and two dimensional level curves in DEA*, *Journal of Productivity Analysis* 9 (3) (1998) 205-232.
- [26] Smith, D.R., *Variational Methods in Optimization*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications (1998).
- [27] Soares de Mello, J.C.C.B., Gomes, E.G., Biondi, L.N., *Modelo DEA com restrições aos pesos para estabelecer uma classificação olímpica*, *Anais do XXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, Nova Friburgo, Rio de Janeiro, Brasil, Setembro (2002).
- [28] Soares de Mello, J.C.C.B., Lins, M.P.E., Gomes, E.G., *Construction of a smoothed DEA frontier*, *Pesquisa Operacional* (2002) (a publicar).
- [29] Soares de Mello, J.C.C.B., Lins, M.P.E., Gomes, E.G., *Estimativa de planos tangentes à fronteira DEA em DMUs extremo-eficientes*, *Anais do XXXIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional – SBPO*, Campos do Jordão, SP, Brasil, Novembro (2001).
- [30] Soares de Mello, J.C.C.B., *Métodos variacionais em condução de calor*, Tese de Mestrado, Coordenação de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal Fluminense, Niterói, Brasil (1987).

- [31] Soares de Mello, J.C.C.B., Suavização da fronteira DEA com o uso de métodos variacionais, Tese de Doutorado, Programa de Engenharia de Produção, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil (2002)
- [32] Swokowski, E.W., Cálculo com Geometria Analítica, Makron Books do Brasil Editora Ltda., Rio de Janeiro (1995).
- [33] Thanassoulis, E., A comparison of regression analysis and data envelopment analysis as alternative methods of performance assessment, *Journal of the Operational Research Society* 44 (11) (1993) 1129-1144.